Fonctions III
Sens de variation

Définition

Exercice 1

Soient x et y deux réels tels que $x<y$

On a : $2x < 2y$

$2x+1 < 2y+1$

$f(x)<f(y)$

Donc, par définition, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soient x et y deux réels tels que $x<y$

On a : $x+1 < y+1$

$-3(x+1) > -3(y+1)$

$f(x)>f(y)$

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soient x et y deux réels tels que $x<y$

On a : $-x > -y$

(...)

$f(x)>f(y)$

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Fonctions usuelles

Exercice 4

Soient x et y deux réels tels que $0\leq x<y$

On a : $\begin{cases} 0\leq x<y \\ 0\leq x<y \end{cases}$

Or on peut multiplier membre à membre deux inégalités de même sens dont les termes sont tous positifs (voir Inégalités, V), ce qui donne ici : $x^2<y^2$.

Donc $f(x)<f(y)$

f est donc strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Soient x et y deux réels tels que $x<y\leq 0$

On a : $-x>-y\geq 0$

Donc, en appliquant ce qui vient d'être démontré :

$(-x)^2 > (-y)^2$

$x^2 > y^2$

$f(x)>f(y)$

f est donc strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.

Exercice 5

Soient x et y deux réels tels que $0<x<y$

En divisant les deux membres de l'inégalité « $x<y$ » par le nombre y, qui est strictement positif, on a :

$$\frac{x}{y}<1$$

Puis, en divisant par x :

$$\frac{1}{y}<\frac{1}{x}$$

Donc : $f(y)<f(x)$

f est donc strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

Soient x et y deux réels tels que $x<y<0$

En divisant les deux membres de l'inégalité « $x<y$ » par le nombre y, qui est strictement négatif, on a :

$$\frac{x}{y}>1$$

Puis, en divisant par x :

$$\frac{1}{y}<\frac{1}{x}$$

Donc : $f(y)<f(x)$

f est donc strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.

Exercice 6

Soient x et y deux réels tels que $1<x<y$

On a : $0<x-1 < y-1$

$0<(x-1)^2 < (y-1)^2$

Car la fonction carré est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

$$\frac{1}{(x-1)^2} > \frac{1}{(y-1)^2}$$

Car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

$$-\frac{2}{(x-1)^2} < -\frac{2}{(y-1)^2}$$

(On a multiplié les deux membres par -2.)

$$3-\frac{2}{(x-1)^2} < 3-\frac{2}{(y-1)^2}$$

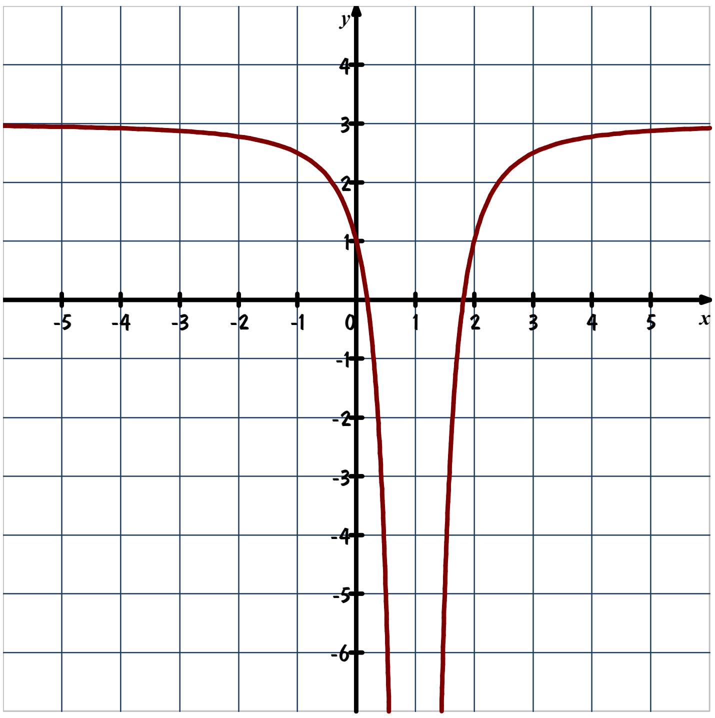
(On a ajouté 3 aux deux membres.)

$$\underline{f(x)<f(y)}$$

Donc f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

On démontrerait de même que f est strictement <u>décroissante</u> sur $]-\infty;1[$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↗



Exercice 7

Méthode similaire à celle de l'exercice précédent.

Signe de la différence des images

Exercice 8

<u>Soient x et y deux réels tels que $1 \le x < y$</u>

$$\begin{aligned} f(y)-f(x) &= (y^2-2y)-(x^2-2x) \\ &= y^2-2y-x^2+2x \\ &= y^2-x^2-2(y-x) \\ &= (y-x)(y+x)-2(y-x) \\ &= (y-x)[y+x-2] \end{aligned}$$

Or :
- $x<y$ donc : $\underline{0<y-x}$
- $\begin{cases} 1\le x \\ 1<y \end{cases}$ donc : $2<x+y$

  donc : $\underline{0<x+y-2}$

Donc : $0<(y-x)(y+x+2)$

$0<f(y)-f(x)$

$\underline{f(x)<f(y)}$

Donc f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

Exercice 9

<u>Soient x et y deux réels tels que</u> $\underline{x<y\le \frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} f(y)-f(x) &= (\ldots) \\ &= (y-x)[1-(y+x)] \end{aligned}$$

Or :
- $x<y$ donc : $\underline{0<y-x}$
- $\begin{cases} x<\frac{1}{2} \\ y\le\frac{1}{2} \end{cases}$ donc : $x+y<1$

  donc : $\underline{0<1-(x+y)}$

Donc : $0<(y-x)[1-(y+x)]$

$0<f(y)-f(x)$

$\underline{f(x)<f(y)}$

Donc f est strictement croissante sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$.

Exercice 10

Méthode similaire à celle des exercices précédents.

Exercice 11

Soient x et y deux réels tels que $-1 < x < y$

$$f(y)-f(x) = (\ldots)$$
$$= \frac{y-x}{(y+1)(x+1)}$$

Or :
- $x<y$ donc : $0<y-x$
- $-1<y$ donc : $0<y+1$
- $-1<x$ donc : $0<x+1$

Donc : $0<\dfrac{y-x}{(y+1)(x+1)}$

$0<f(y)-f(x)$

$f(x)<f(y)$

Donc f est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$.

Exercice 12

Soient x et y deux réels tels que $1 < x < y$

$$f(y)-f(x) = (\ldots)$$
$$= \frac{3(x-y)}{(y-1)(x-1)}$$

Or :
- $x<y$ donc : …
- …
- …

Exercice 13

Soient x et y deux réels tels que $0<x<y\leq\sqrt{2}$

$$f(y)-f(x) = (\ldots)$$

$$= (y-x)\left(\frac{xy-2}{xy}\right)$$

Or :
- $x<y$ donc : $0<y-x$
- $\begin{cases} 0<x<\sqrt{2} \\ 0<y\leq\sqrt{2} \end{cases}$ donc : $0<xy<2$

  donc : $xy-2<0$

Donc : $(y-x)\left(\dfrac{xy-2}{xy}\right)<0$

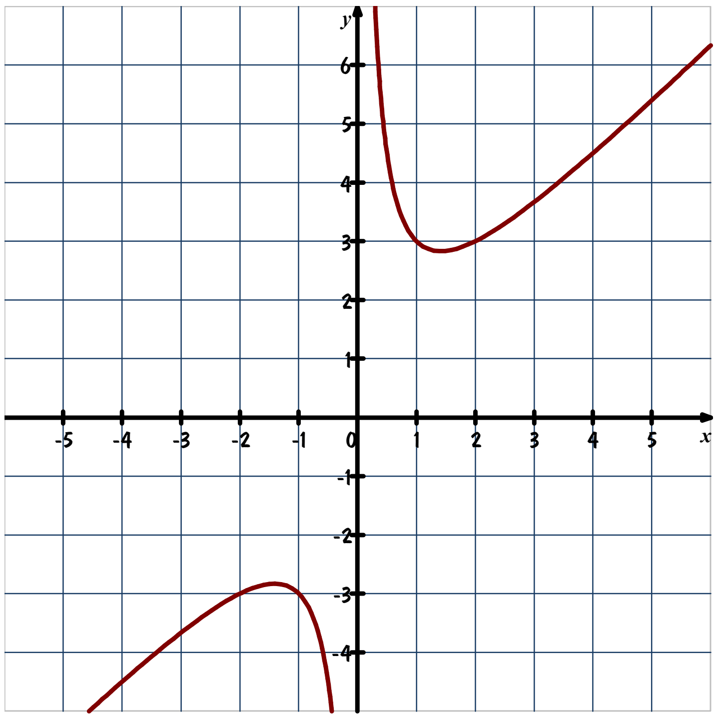
$f(y)-f(x)<0$

$f(y)<f(x)$

Donc f est strictement décroissante sur $]0;\sqrt{2}]$.

On démontre de façon similaire que f est strictement croissante sur $[\sqrt{2};+\infty[$.

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f(x)$	‖	↘	3	↗	



Exercice 14

Soient x et y deux réels tels que $0 \leq x < y$

$$f(y)-f(x) = (\ldots)$$
$$= \frac{(y-x)(y+x)}{(y^2+1)(x^2+1)}$$

(...)

Exercice 15

Soient x et y deux réels tels que $1 < x < y$

$$f(y)-f(x) = (\ldots)$$
$$= \frac{(y-x)(1+xy)}{(1-y)(1+y)(1-x)(1+x)}$$

(...)

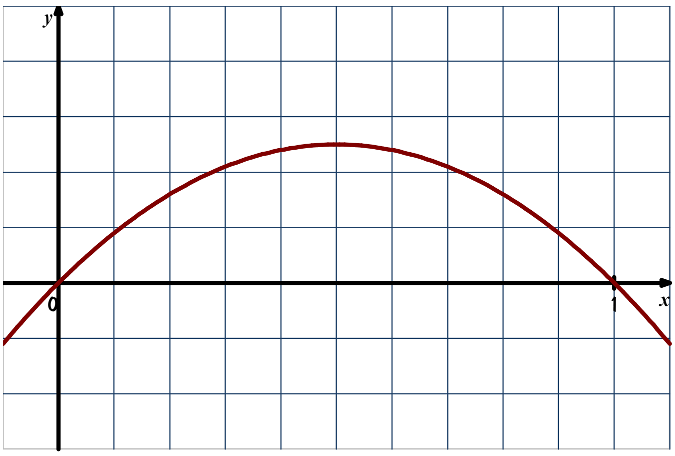
Étude d'un problème à l'aide d'une fonction.

Exercice 16

a) $S(x) = x - x^2$

b) $]0;1[$

c)



$S(x)$ semble maximale lorsque x vaut 0,5

d) (...)

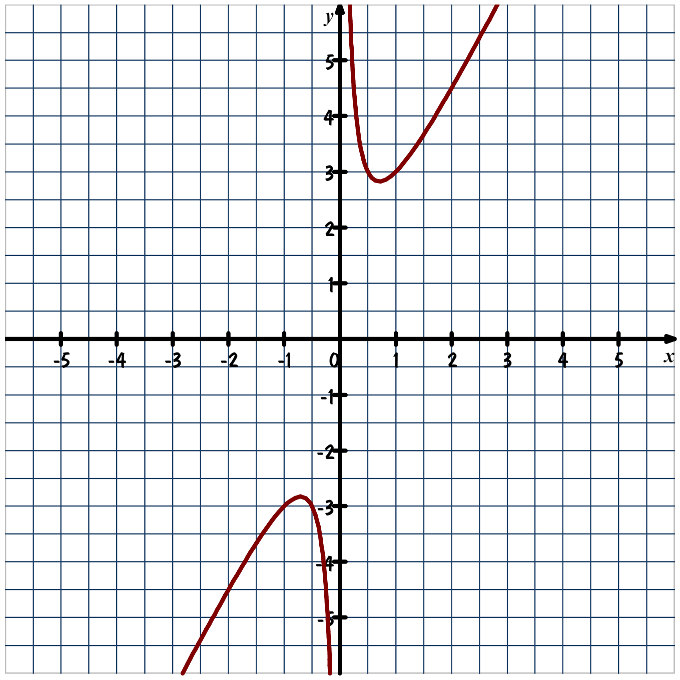
e) Le rectangle prend une aire maximale lorsqu'il est un carré.

Exercice 17

a) $L(x) = \frac{1}{x} + 2x$

b) $]0;+\infty[$

c)



d) (...)

e) $L(x)$ est minimale pour $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et alors sa valeur est $2\sqrt{2}$.

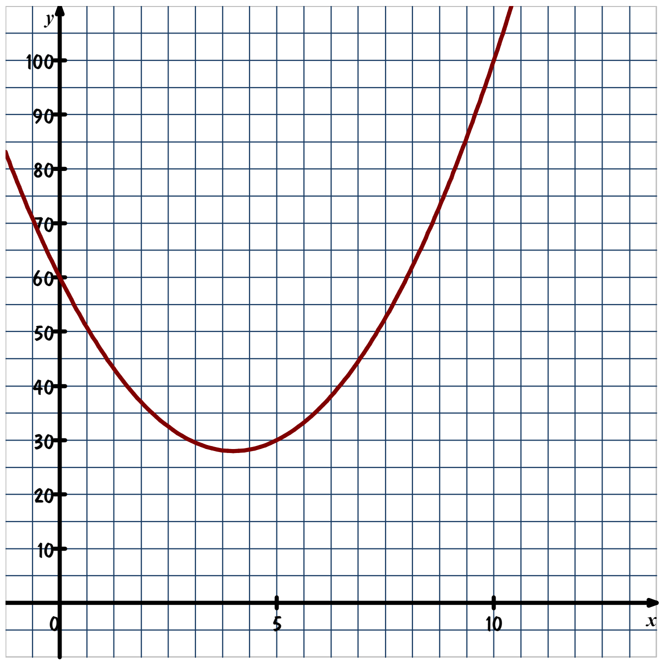
Il faudra prévoir 2829m de clôture.

Exercice 18

a) $A(x) = 2x^2 - 16x + 60$

b) $[0;6]$

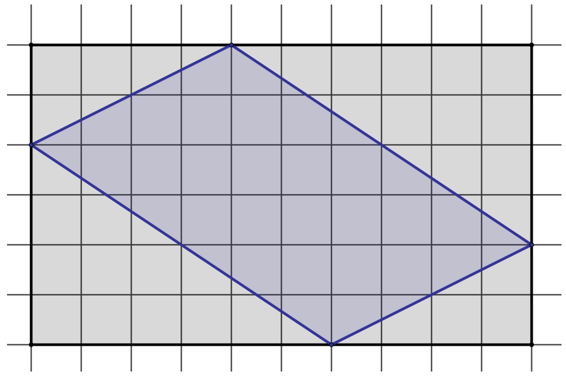
c)



d) $A(x) = 2\left[(x-4)^2 + 14\right]$ $(\ \alpha = 4\ ;\ \beta = 14\ )$

e) (...)

f)



($A(x)$ est minimale pour $x = 4$ et alors sa valeur est 28.)

Exercice 19

a) $y = -\dfrac{3}{2}x + 3$

b) $A(x) = \dfrac{3}{2}\left(-x^2 + 2x\right)$ $\left(\alpha = \dfrac{3}{2}\right)$

c) (...)

d) (...)

e) 1,5 cm²

Encadrements

Exercice 20

$1 \leq 5 - x^2 \leq 4$

Exercice 21

$\sqrt{x^2 + 3} \geq 2$

Exercice 22

a) $1 \leq \dfrac{x}{y} \leq 2$

b) $-2 \leq \dfrac{x}{y} \leq -1$

Exercice 23

a) $A \geq \dfrac{23}{8}$

b) $A \geq \dfrac{5}{2}$

Exercice 24

On peut démontrer que, sur les intervalles considérés :

$$\frac{1}{3} \leq \frac{x^2 + y^2}{xy} \leq 13$$

En réalité, l'encadrement le plus serré serait : $2 \leq \dfrac{x^2 + y^2}{xy} \leq \dfrac{10}{3}$,

mais c'est difficile à prouver.

Approfondissements

Exercice 25

On démontre que $a > b$ en élevant a et b au carré, après avoir prouvé qu'ils sont tous deux positifs.

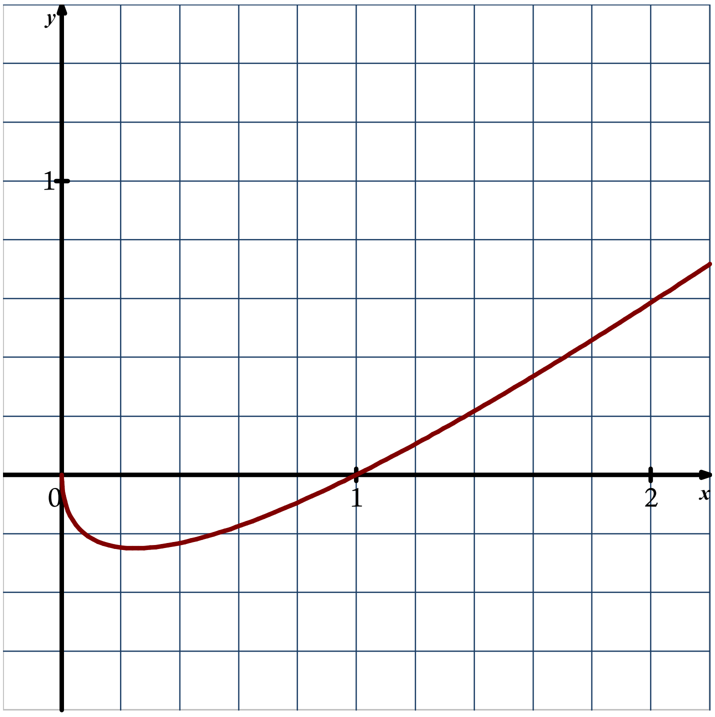
Exercice 26

On démontre que $a > b$ en élevant a et b au carré, après avoir prouvé qu'ils sont tous deux positifs.
On peut procéder par équivalences en partant de $a > b$.
On prouve que cette inégalité est équivalente à :
$2\times 10^{-18} > 10^{-19} + 10^{-36}$
(…)

Exercice 27

On peut procéder par équivalences en traitant séparément les deux inégalités.

Exercice 28



Soient x et y deux réels tels que $0 \leq x < y < \dfrac{1}{4}$

$$f(y) - f(x) = (\ldots) = (b-a)\left[1 - \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}\right]$$

On peut ensuite démontrer que ce nombre est strictement négatif.

(…)